

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง Numerical Simulation of Suspended String Vibration

คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย^{1,2} และ ใจปอง เกษมสุวรรณ¹

Kanawoot Subklay^{1,2} and Jaipong Kasemsuwan¹

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงแบบจำลองของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง และศึกษาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยใช้ระเบียบวิธีแครงค์นิกอลสัน (Crank-Nicolson Method) เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) จากงานวิจัยของ J. Kasemsuwan (2010) โดยกำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของเส้นลวดและความเร็วต้นของเส้นลวดเหมือนกัน และได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยค่าประมาณจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน โดยแสดงตารางเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นและกราฟเปรียบเทียบลักษณะการสั่นของเส้นลวดที่ได้จากวิธีทั้งสอง นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้แสดงการศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขเบื้องต้นของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นลวดอีกด้วย

คำสำคัญ: สมการเส้นลวดในแนวตั้ง ผลเฉลยเชิงตัวเลข วิธีแครงค์นิกอลสัน

ABSTRACT

This paper is to study an approximate numerical solution of the initial boundary value problem of the suspended string vibrating equation using the Crank-Nicolson method. The results are compared with those obtained from the finite difference method previously reported (J. Kasemsuwan, 2010). It is found that the approximate solutions obtained from both methods are in good agreement under the same initial shapes and initial velocity. The comparison results between these two methods are shown graphically and also summarized in tables. In addition, the vibration taking into account the nonlinear outer force is also investigated.

Key Words : Suspended String Equation, Numerical Solution, Crank-Nicolson Method

E-mail : darkenesis1@hotmail.com

¹ สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

² Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Rd., Bangkok 10400, Thailand

คำนำ

สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งได้ถูกศึกษาโดย [1] และมีงานวิจัย [2]-[10] ได้ทำการศึกษาวิธีการพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่าง ๆ ตามที่ได้อธิบายไว้ใน [11] มีเพียงงานวิจัย [10] เท่านั้นที่ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นในแนวตั้งโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด โดยได้ข้อสรุปว่าแอมพลิจูดของการสั่นเพิ่มขึ้นเมื่อความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่และเป็นฟังก์ชันพหุนาม ในขณะที่แอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นและลดลงเพียงเล็กน้อยเมื่อความเร็วเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ และไม่ว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงลักษณะของการสั่นก็ยังคงรักษารูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด และเนื่องจากผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่หนึ่งและสองทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ ในงานวิจัยนี้จึงนำเสนอขั้นตอนของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยใช้ระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสันและนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขในงานวิจัย [10] พบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน

ระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสัน

งานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาการสั่นในแนวตั้งของเส้นลวดที่ยึดหยุ่นและมีน้ำหนัก มีความหนาแน่นเอกกรูปลยาว a หน่วย ปลายด้านบนถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนปลายด้านล่างปล่อยอิสระแต่มีความชันคงที่ ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขตของสมการการสั่นถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - x \partial_x^2 u(x,t) - \partial_x u(x,t) + f(x,t,u) &= 0, \quad (x,t) \in \Omega \\ u(0,t) &= 0, \quad \partial_x u(a,t) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,a] \end{aligned}$$

เมื่อ $u(x,t)$ แทนตำแหน่งของเส้นลวด ณ ตำแหน่ง x และเวลา t ใดๆ กำหนดให้ $\Omega = (0,a) \times (0,T)$ แทนโดเมนของการสั่นสมการที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ในการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขในรูปที่ 1-3 นั้น ได้กำหนดให้เส้นลวดยาว 1 หน่วย รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเป็น $\sin 7x$ ($\phi(x) = \sin 7x$) แรงภายนอกเป็นศูนย์ ($f(x,t,u) = 0$) ประมาณค่า $\partial_t^2 u(x,t)$ ด้วยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง ประมาณค่า $\partial_x^2 u(x,t)$ และ $\partial u(x,t)$ โดยระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสันด้วยสูตรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{กำหนดให้ } M &= \frac{1}{\Delta x} \text{ และ } N = \frac{1}{\Delta t} \text{ โดยที่ } m = 0, 1, 2, \dots, M \text{ และ } n = 0, 1, 2, \dots, N \text{ เมื่อ } p = \frac{k^2}{h} \\ -p(2m+1)u_{m+1}^1 + 4(1+mp)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 &= p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + p(2m-1)u_{m-1}^0 + 4k\psi(x) \\ -p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} &= p(2m+1)u_{m+1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m-1)u_{m-1}^n - 4u_m^{n-1} \\ 4(1+Mp)u_M^1 - 4Mpu_{M-1}^1 &= 4(1-Mp)u_M^0 + 4Mpu_{M-1}^0 + 4kf_2(x) \\ 4(1+Mp)u_M^{n+1} - 4Mpu_{M-1}^{n+1} &= 4(2-Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n - 4u_M^{n-1} \end{aligned}$$

ผลการทดลองและวิจารณ์

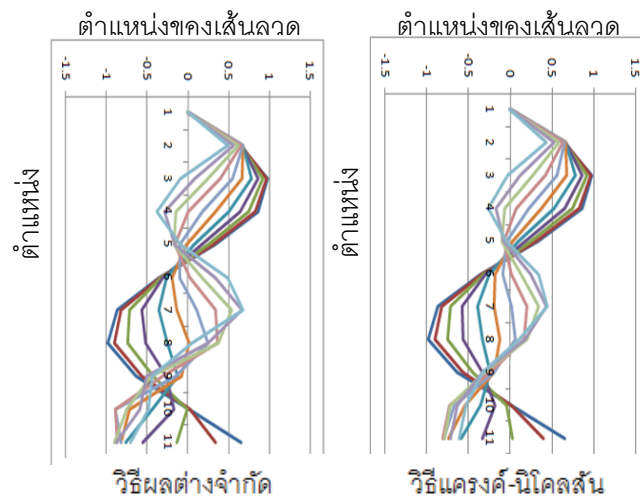
โปรแกรม MATLAB 7 และ Excel ถูกนำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีแครงค์นิโคลสัน และนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีผลต่างจำกัด จะได้ผลเฉลยใกล้เคียงกันดังนี้

	m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
n	t	x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0	0.64422	0.98545	0.86321	0.33499	-0.3508	-0.8716	-0.9825	-0.6313	0.01681	0.65699	
1	0.05	0	0.64896	0.96501	0.82463	0.30406	-0.3452	-0.818	-0.8986	-0.5594	0.03114	0.3369	
2	0.1	0	0.65744	0.92395	0.74927	0.24563	-0.3317	-0.7125	-0.738	-0.4256	-0.0074	-0.1361	
3	0.15	0	0.6677	0.86198	0.64077	0.16633	-0.3055	-0.5588	-0.5147	-0.2616	-0.1654	-0.5447	
4	0.2	0	0.6769	0.77889	0.50457	0.07546	-0.2611	-0.3631	-0.2511	-0.1245	-0.4339	-0.7637	
5	0.25	0	0.68146	0.67484	0.34798	-0.0157	-0.1928	-0.1352	0.018	-0.077	-0.715	-0.8178	
6	0.3	0	0.67726	0.5506	0.17998	-0.095	-0.0967	0.1097	0.24444	-0.1472	-0.8849	-0.8205	
7	0.35	0	0.65984	0.40796	0.0111	-0.1504	0.02796	0.3481	0.37556	-0.3007	-0.8828	-0.8554	
8	0.4	0	0.62472	0.24995	-0.1471	-0.1716	0.17659	0.5469	0.37541	-0.4512	-0.7504	-0.904	
9	0.45	0	0.56775	0.08118	-0.2827	-0.1515	0.33696	0.667	0.24814	-0.5102	-0.591	-0.8758	
10	0.5	0	0.48543	-0.0921	-0.384	-0.0879	0.48776	0.6736	0.04675	-0.4442	-0.482	-0.7052	

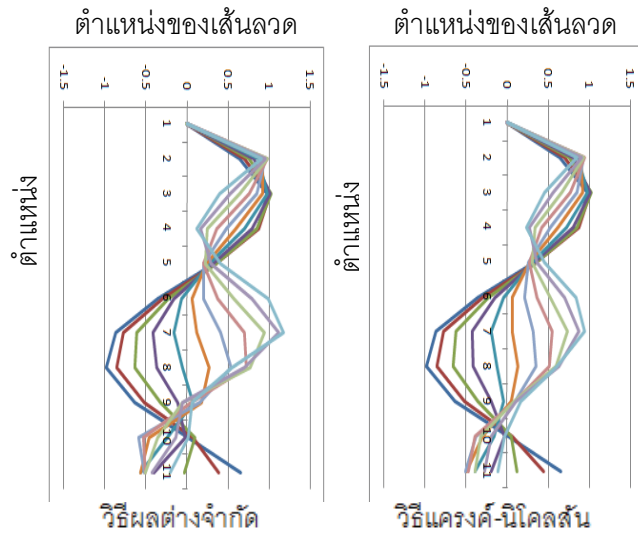
ตารางที่ 1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีผลต่างจำกัดเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์

	m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
n	t	x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0	0.6442	0.9855	0.8632	0.335	-0.3508	-0.872	-0.9825	-0.6313	0.0168	0.657	
1	0.1	0	0.6485	0.9649	0.8255	0.3057	-0.3441	-0.819	-0.9022	-0.5658	0.0092	0.3994	
2	0.1	0	0.6555	0.9238	0.7529	0.2519	-0.3277	-0.717	-0.7528	-0.4553	-0.0477	0.0259	
3	0.2	0	0.6631	0.8619	0.6498	0.1811	-0.2972	-0.57	-0.5533	-0.3332	-0.1743	-0.3277	
4	0.2	0	0.6682	0.7795	0.5225	0.1025	-0.2486	-0.389	-0.3305	-0.236	-0.3514	-0.5846	
5	0.3	0	0.6672	0.6775	0.3787	0.0263	-0.1789	-0.188	-0.1163	-0.1894	-0.5315	-0.7329	
6	0.3	0	0.6563	0.5575	0.2276	-0.0372	-0.0882	0.0167	0.058	-0.1979	-0.6653	-0.7977	
7	0.4	0	0.6315	0.4222	0.0791	-0.0795	0.0195	0.2019	0.1688	-0.2444	-0.7241	-0.8084	
8	0.4	0	0.5893	0.2757	-0.057	-0.0947	0.1357	0.3462	0.2074	-0.299	-0.7072	-0.7798	
9	0.5	0	0.5267	0.123	-0.1712	-0.0808	0.2476	0.4317	0.1818	-0.3331	-0.6332	-0.7131	
10	0.5	0	0.4417	-0.0296	-0.2557	-0.0404	0.3399	0.4495	0.1139	-0.33	-0.5256	-0.6063	

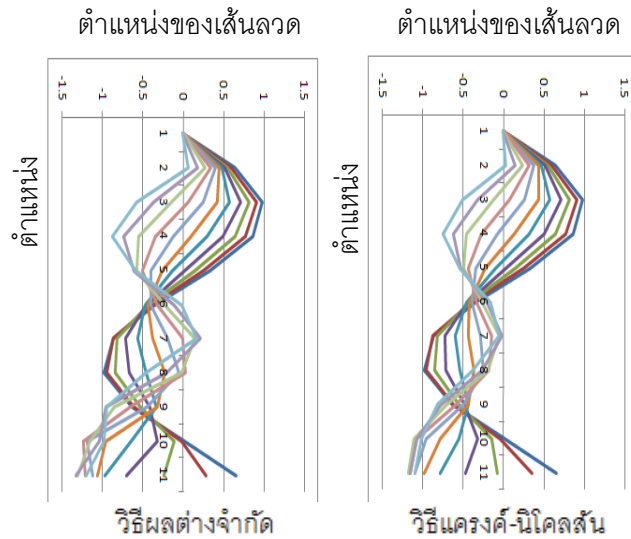
ตารางที่ 2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีแครงค์-นิโคลสันเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์



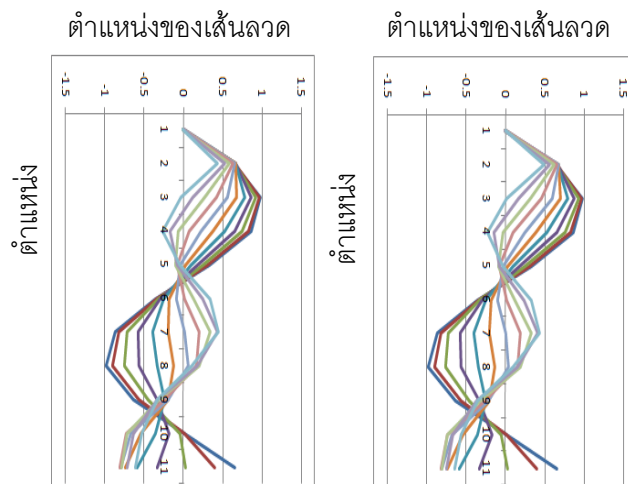
รูปที่ 1 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์



รูปที่ 2 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็น 1 เมตรต่อวินาที



รูปที่ 3 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็น -1 เมตรต่อวินาที



รูปที่ 4 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีแครงค์-นิโคลสัน เมื่อไม่มีแรงและมีแรงภายนอกคือ $(-u^3)$

ผลสรุปและข้อเสนอแนะ

นอกจากระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแล้ว ยังสามารถใช้ระเบียบวิธีเครงคินิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นในแนวตั้งได้อีกด้วย และผลเฉลยประมาณค่าที่ได้ยังมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเดียวกัน โดยวิธีเครงคินิโคลสันดีกว่าวิธีผลต่างจำกัด เนื่องจากค่าแอมพลิจูดที่ได้มีค่าน้อยกว่า โดยสังเกตจากกราฟจะเห็นลักษณะการสั่นอย่างราบรื่น (Smooth Vibration) และต่อเนื่องจากว่า อีกทั้งวิธีเครงคินิโคลสันยังสามารถใช้กับโดเมนเท่าใดก็ได้ นอกเหนือจากนี้ในรูปภาพ ที่ 4 เมื่อกำหนดให้แรงภายนอกเป็น $-u^3$ จะสังเกตเห็นว่าตำแหน่งของคลื่นมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เมื่อถูกแรงภายนอกกระทำ

กิตติกรรมประกาศ

ผลงานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัยจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ประเทศไทย

เอกสารอ้างอิง

- ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. "การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง"วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 3 ,30: 101-111.
- N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation : North-Holland Publ. Co, 1964.
- M. Yamaguchi, *Almost periodic oscillations of suspended string under Quasiperiodic linear force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 303, No.2 (2005), 643-660.
- M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced oscillations of nonlinear damped equation of suspended string*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 342, No.1 (2008), 89-107
- M. Yamaguchi, *Global smooth solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 342, No.2 (2008), 798-815.
- M. Yamaguchi, *Infinitely many periodic solutions of nonlinear equations of suspended strings*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA 51, No.2 (2008), 245-267.
- M. Yamaguchi, *Existence and regularity of periodic solutions of nonlinear equation of a suspended string*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA 52, No.2 (2009), 281-300.
- J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Tokyo Journal of Mathematics 30, No.2 (2007), 543-556.
- J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global classical solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, , Tokyo Journal of Mathematics 31, No.2 (2008), 351-373.

- J. Kasemsuwan, *Exponential decay for nonlinear damped equation of suspended string*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of suspended string equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.