การประมาณค่าแบบช่วงที่มีความเที่ยงตรงสำหรับพารามิเตอร์ในการแจกแจงแบร์นูลลี

More Accurate Interval Estimation for Bernoulli Parameter

__สุภาวดี สุวิธรรมา__[1] และยงยุทธ ไชยพงศ์[1]

__Suphawadee Suwithanma__[1] and Yongyuth Chaiyapong[1]

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบการประมาณค่าแบบช่วงที่มีความเที่ยงตรงสำหรับพารามิเตอร์ในการแจกแจงแบร์นูลลี 5 วิธีคือ วิธีแบบWald วิธีแบบWilson วิธีแบบAgresti-Coull วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์และวิธี Bootstrap Agresti-Coull โดยใช้เกณฑ์ในการตัดสิน คือ ความน่าจะเป็นของการครอบคลุมและความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น กำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก($n < 50$) กลุ่มตัวอย่างขนาดปานกลาง($50 \le n \le 100$) และกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่($n > 100$) กำหนดค่าพารามิเตอร์ p เท่ากับ 0.01, 0.05, 0.09, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40 และ 0.50 โดยประมาณช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% ซึ่งจำลองข้อมูลโดยใช้โปรแกรม Minitab 15 และทำการทดลองซ้ำๆกัน 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ ผลการวิจัยพบว่า กรณีที่ระดับความเชื่อมั่น 90%,95% และ 99% วิธีการประมาณค่าทั้ง 5 วิธีให้ผลไปในทิศทางเดียวกัน คือ วิธีแบบ Wald จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำที่สุด เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่และ $0.05 \le p \le 0.10$ วิธีแบบ Wilson จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $0.01 \le p \le 0.20$ วิธีแบบ Agresti-Coull จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาแต่ไม่สามารถให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำที่สุดได้ วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์ จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $p < 0.05$ และวิธี Bootstrap Agresti-Coull จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $0.20 \le p \le 0.50$

คำสำคัญ : ช่วงความเชื่อมั่น ความน่าจะเป็นของการครอบคลุม ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

ABSTRACT

The objective of this research is to compare and study more accurate interval estimation for Bernoulli parameter. There are altogether 5 methods to be investigational namely : Wald method, Wilson method, Agresti-Coull method, Bayes with Yates' correction for continuity method and Bootstrap Agresti-Coull method. The comparison is based on two criterias , coverage probabilities and average expected widths. The comparison were done by using three levels of sample sizes (n) :

[1] ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จ. เชียงใหม่ 50200

Department of Statistic, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200

small ($n<50$), medium ($50 \le n \le 100$) and large ($n>100$) whereas parameter p are 0.01, 0.05, 0.09, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40 and 0.50 all of which are considered at 90%, 95% and 99% confidence levels. This research used the Minitab 15 simulation method. The experiment was repeated 1,000 times for each condition. Results of the research are as follows : All methods to yield in the same direction at 90%, 95% and 99% confidence levels, Wald method meets both requirement of coverage probabilities not lower than given confidence levels and the average expected widths are shortest when n is large and $0.05 \le p \le 0.10$. Wilson method meets both requirement of coverage probabilities not lower than given confidence levels for nearly all conditions under study and the average expected widths are shortest when $0.01 \le p \le 0.20$. Agresti-Coull method meets requirement of coverage probabilities not lower than given confidence levels for nearly all conditions under study but the average expected widths are not shortest. Bayes with Yates' correction for continuity method meets both requirement of coverage probabilities not lower than given confidence levels for nearly all conditions under study and the average expected widths are shortest when $p \le 0.05$ and Bootstrap Agresti-Coull method meets both requirement of coverage probabilities not lower than given confidence levels for nearly all conditions under study and the average expected widths are shortest when $0.20 \le p \le 0.50$.

Keywords : confidence interval, coverage probability, average expected width.

E-mail : **porple.21@hotmail.com**

คำนำ

พารามิเตอร์ที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติและการทำความเข้าใจลักษณะของประชากรอนันต์ คือ ค่าความน่าจะเป็นของการเกิดผลสำเร็จในการแจกแจงแบร์นูลลี (p) โดยศึกษาภายใต้กรอบแนวคิดของ Frequentist ซึ่งตัวอย่างสุ่มมีลักษณะเป็นอิสระกันและมีรูปแบบการแจกแจงเดียวกัน

การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p กลายเป็นปัญหาพื้นฐานที่สำคัญในการอนุมานเชิงสถิติ เพราะไม่สามารถหาตัวประมาณที่ทำให้ได้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุม(Coverage Probability) เท่ากับ $1-\alpha$ ได้พอดี ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงกลายเป็นปัญหาของความน่าจะเป็นของการครอบคลุมที่กระทำภายใต้ตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง นั่นเอง จึงนำไปสู่การพัฒนาและปรับปรุงวิธีการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับพารามิเตอร์ p ที่เหมาะสมขึ้นหลากหลายวิธี เช่น วิธีแบบ Wald (Wald, 1943) วิธีแบบWilson (Wilson, 1927) และวิธีแบบ Agresti-Coull (Brown et al., 2002) เป็นต้น ซึ่งแต่ละวิธีต่างก็พบปัญหาในการประมาณค่าที่แตกต่างกัน สำหรับวิธีที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปในตำราเรียน คือ วิธีแบบWald แต่พบว่าเป็นวิธีที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่น ($1-\alpha$) ที่กำหนด เมื่อ p มีค่าเข้าใกล้ 0 หรือ 1 และตัวอย่างขนาดเล็ก (Brown et al., 2002 , Reiczigel, 2003, Sauro และ Lewis, 2005) ส่วนวิธีแบบ Agresti-Coull มีแนวโน้มที่จะให้ช่วงที่กว้างมากเกินไป(Piegorsch, 2003) ด้วยเหตุผลนี้จึงนำมาซึ่งงานวิจัยเพื่อปรับปรุงวิธีการประมาณค่าแบบช่วงให้มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้นสำหรับพารามิเตอร์ p โดยการนำเอาตัวประมาณแบบเบย์(Brown and

Li, 2005)และเทคนิคการปรับค่าความต่อเนื่องของ Yates มาประยุกต์ใช้กับวิธีแบบ Wald และได้นำเอาวิธีบูตสแตรปมาปรับใช้กับวิธีแบบ Agresti-Coull

อุปกรณ์และวิธีการ

ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 3 กลุ่ม คือ ขนาดเล็ก ($n<50$) ขนาดปานกลาง ($50 \le n \le 100$) และขนาดใหญ่ ($n>100$) กำหนดค่าพารามิเตอร์ p มีค่าเท่ากับ 0.01, 0.05, 0.09, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40 และ 0.50 โดยประมาณช่วงความเชื่อมั่นที่ระดับความเชื่อมั่น 90%,95% และ 99% และเกณฑ์ที่ใช้สำหรับการตัดสิน คือ ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมและค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น สำหรับเกณฑ์การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุม พิจารณาได้จากการทดสอบสมมติฐาน $H_0: c \ge c_0$ กับ $H_1: c < c_0$ (Ghosh, 1979) เมื่อ c_0 แทนระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด ภายใต้สถิติทดสอบ Z ดังนั้น ถ้าวิธีใดให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่า 0.8878, 0.9387 และ 0.9827 ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%,95% และ 99% ตามลำดับ และให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด จะสรุปว่า วิธีนั้นเป็นวิธีการประมาณค่าที่มีความเที่ยงตรงและเหมาะสมที่สุดสำหรับสถานการณ์นั้นๆ

ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. จำลองข้อมูลโดยใช้โปรแกรม Minitab 15 โดยการสร้างตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli Distribution) ที่มีพารามิเตอร์ p ในแต่ละสถานการณ์ของค่า n ตามขอบเขตการวิจัย และประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นโดย 5 วิธี ดังนี้

1.1 วิธีแบบ Wald $$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad ; \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

1.2 วิธีแบบ Wilson $$\tilde{p} \pm \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{\tilde{n}}\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4}} \quad ; \tilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + (0.5)Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2} \quad , \tilde{n} = n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

1.3 วิธีแบบ Agresti-Coull $$\tilde{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}} \quad ; \tilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + (0.5)Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2} \quad , \tilde{n} = n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

1.4 วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์

$$\tilde{p} \pm \left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\tilde{p}(1-\tilde{p})}{\tilde{n}}} + \frac{1}{2n} \right) \quad ; \tilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 0.5}{n+1}, \tilde{n} = n+1$$

1.5 วิธี Bootstrap Agresti-Coull

$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}(\tilde{p}_b^* \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\tilde{p}_b^*(1-\tilde{p}_b^*)}{\tilde{n}}}) ; \tilde{p}_b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{*b} + (0.5)Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2} ; \tilde{n} = n + Z_{\frac{\alpha}{2}}^2 ; b = 1,2,..,B ; B = 1{,}000$$

2. คำนวณค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมและความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

3. เปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมและความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น และเพื่อความสะดวกในการอธิบายจึงกำหนดสัญลักษณ์ต่างๆแทนความหมายต่อไปนี้

วิธีที่ 1 หมายถึง วิธีแบบ Wald

วิธีที่ 2 หมายถึง วิธีแบบ Wilson

วิธีที่ 3 หมายถึง วิธีแบบ Agresti-Coull

วิธีที่ 4 หมายถึง วิธีแบบ วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์

วิธีที่ 5 หมายถึง วิธีแบบ วิธี Bootstrap Agresti-Coull

ผลการทดลองและวิจารณ์

1. ความน่าจะเป็นของการครอบคลุม (Coverage Probability)

ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% แต่ละวิธี ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไปในทิศทางเดียวกัน ดังตารางที่ 1 และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับเกณฑ์ พบว่า วิธีแบบ Wald ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อค่า p เข้าใกล้ 0.50 และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ส่วนวิธีแบบ Wilson วิธีแบบ Agresti-Coull วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์และวิธี Bootstrap Agresti-Coull ให้ตัวประมาณที่ดีกว่าวิธีแบบ Wald นั่นคือให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีของค่า n และ p

ตารางที่ 1 ความน่าจะเป็นของการครอบคลุม (Coverage Probability) จำแนกตามขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์ p ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

ขนาดตัวอย่าง	วิธีการประมาณค่า	ค่าพารามิเตอร์ p							
		0.01	0.05	0.09	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
5	วิธีที่ 1	0.0440	0.2230	0.3400	0.3860	0.6510	0.8230	0.8100	0.9470*
	วิธีที่ 2	0.9560*	0.9750*	0.9260	0.9350	0.9410*	0.9630*	0.9910*	0.9470*
	วิธีที่ 3	0.9560*	0.9750*	0.9260	0.9350	0.9410*	0.9630*	0.9910*	0.9470*
	วิธีที่ 4	1.0000*	0.9990*	0.9990*	0.9990*	0.9930*	0.9630*	0.9910*	0.9470*
	วิธีที่ 5	0.9560*	0.9750*	0.9260	0.9350	0.9410*	0.9630*	0.9910*	0.9470*
10	วิธีที่ 1	0.0870	0.4120	0.5990	0.6420	0.8810	0.8400	0.9220	0.8920
	วิธีที่ 2	0.9130	0.9060	0.9510*	0.9370	0.9710*	0.9280	0.9850*	0.9760*
	วิธีที่ 3	0.9950*	0.9910*	0.9510*	0.9370	0.9710*	0.9550*	0.9850*	0.9760*
	วิธีที่ 4	1.0000*	0.9990*	0.9980*	0.9980*	0.9960*	0.9650*	09520*	0.9760*
	วิธีที่ 5	0.9950*	0.9270	0.9510*	0.9370	0.9710*	0.9550*	0.9680*	0.9760*
20	วิธีที่ 1	0.1800	0.6270	0.8570	0.8580	0.9210	0.9520*	0.9330	0.9570*
	วิธีที่ 2	0.9800*	0.9250	0.9660*	0.9470*	0.9480*	0.9710*	0.9660*	0.9570*
	วิธีที่ 3	0.9800*	0.9900*	0.9660*	0.9470*	0.9480*	0.9710*	0.9660*	0.9570*
	วิธีที่ 4	1.0000*	1.0000*	0.9980*	1.0000*	0.9760*	0.9520*	0.9660*	09570*
	วิธีที่ 5	0.9800*	0.9890*	0.9660*	0.9470*	0.9480*	0.9480*	0.9660*	0.9570*

หมายเหตุ * หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

ตารางที่ 1 (ต่อ)

ขนาดตัวอย่าง	วิธีการประมาณค่า	ค่าพารามิเตอร์ p							
		0.01	0.05	0.09	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
	วิธีที่ 1	0.2910	0.7770	0.9400*	0.8200	0.9600*	0.9550*	0.9190	0.9660*
	วิธีที่ 2	0.9650*	0.9310	0.9460*	0.9720*	0.9670*	0.9280	0.9560*	0.9660*
30	วิธีที่ 3	0.9970*	0.9810*	0.9460*	0.9720*	0.9670*	0.9430*	0.9560*	0.9660*
	วิธีที่ 4	1.0000*	1.0000*	0.9400*	0.9570*	0.9600*	0.9550*	0.9560*	0.9660*
	วิธีที่ 5	0.9800*	0.9640*	0.9460*	0.9720*	0.9670*	0.9380	0.9560*	0.9660*
	วิธีที่ 1	0.4090	0.9070	09410*	0.8780	0.9460*	09540*	0.9350	0.9470*
	วิธีที่ 2	0.9050	0.9630*	0.9540*	0.9620*	0.9500*	0.9700*	0.9350	0.9470*
50	วิธีที่ 3	0.9930*	0.9630*	0.9540*	0.9620*	0.9500*	0.9700*	0.9350	0.9470*
	วิธีที่ 4	1.0000*	0.9070	0.9410*	0.9530*	0.9670*	0.9740*	0.9510*	0.9690*
	วิธีที่ 5	0.9930*	0.9630*	0.9540*	0.9620*	0.9500*	0.9700*	0.9360	0.9510*
	วิธีที่ 1	0.5030	0.8730	0.9390*	0.9200	0.9420*	0.9440*	0.9390*	0.9360
	วิธีที่ 2	0.9670*	0.9840*	0.9420*	0.9300	0.9490*	0.9600*	0.9570*	0.9570*
70	วิธีที่ 3	0.9930*	0.9840*	09590*	0.9770*	0.9490*	0.9600*	0.9570*	0.9570*
	วิธีที่ 4	1.0000*	0.9760*	0.9390*	0.9660*	0.9640*	0.9680*	0.9570*	0.9570*
	วิธีที่ 5	0.9680*	0.9840*	0.9570*	0.9660*	0.9490*	0.9600*	0.9490*	0.9530*
	วิธีที่ 1	0.5760	0.9380	0.9090	0.9460*	0.9550*	0.9470*	0.9480*	0.9590*
	วิธีที่ 2	0.9450*	0.9690*	0.9580*	0.9540*	0.9550*	0.9420*	0.9600*	0.9590*
90	วิธีที่ 3	0.9860*	0.9690*	0.9580*	0.9540*	0.9550*	0.9420*	0.9600*	0.9590*
	วิธีที่ 4	0.9990*	0.9380	0.9610*	0.9460*	0.9680*	0.9620*	0.9600*	0.9590*
	วิธีที่ 5	0.9860*	0.9690*	0.9580*	0.9540*	0.9550*	0.9420*	0.9510*	0.9560*
	วิธีที่ 1	0.6220	0.8590	0.9510*	0.9370	0.9310	0.9490*	0.9470*	0.9500*
	วิธีที่ 2	0.9410*	0.9690*	0.9420*	0.9420*	0.9390*	0.9380*	0.9470*	0.9500*
100	วิธีที่ 3	0.9880*	0.9690*	0.9420*	0.9790*	0.9390*	0.9510*	0.9470*	0.9500*
	วิธีที่ 4	1.0000*	0.9610*	0.9510*	0.9720*	0.9580*	0.9490*	0.9610*	0.9660*
	วิธีที่ 5	0.9880*	0.9690*	0.9420*	0.9650*	0.9410*	0.9500*	0.9470*	0.9500*
	วิธีที่ 1	0.8560	0.9260	0.9480*	0.9180	0.9530*	0.9470*	0.9510*	0.9510*
	วิธีที่ 2	0.9450*	0.9720*	0.9400*	0.9530*	0.9580*	0.9530*	0.9510*	0.9510*
200	วิธีที่ 3	0.9860*	0.9720*	0.9670*	0.9530*	0.9580*	0.9530*	0.9510*	0.9510*
	วิธีที่ 4	0.9980*	0.9760*	0.9630*	0.9600*	0.9590*	0.9580*	0.9590*	0.9640*
	วิธีที่ 5	0.9860*	0.9720*	0.9550*	0.9530*	0.9550*	0.9540*	0.9500*	0.9530*
	วิธีที่ 1	0.7960	0.9260	0.9630*	0.9420*	0.9500*	0.9520*	0.9560*	0.9560*
	วิธีที่ 2	0.9620*	0.9580*	0.9590*	0.9670*	0.9530*	0.9490*	0.9560*	0.9560*
300	วิธีที่ 3	0.9620*	0.9580*	0.9590*	0.9670*	0.9530*	0.9490*	0.9560*	0.9560*
	วิธีที่ 4	0.9420*	0.9660*	0.9760*	0.9570*	0.9590*	0.9560*	0.9600*	0.9660*
	วิธีที่ 5	0.9620*	0.9580*	0.9630*	0.9670*	0.9520*	0.9490*	0.9560*	0.9570*
	วิธีที่ 1	0.8840	0.9440*	0.9590*	0.9420*	0.9520*	0.9470*	0.9480*	0.9650*
	วิธีที่ 2	0.9640*	0.9450*	0.9610*	0.9540*	0.9540*	0.9570*	0.9480*	0.9650*
500	วิธีที่ 3	0.9640*	0.9450*	0.9610*	0.9540*	0.9540*	0.9570*	0.9480*	0.9650*
	วิธีที่ 4	0.9670*	0.9640*	0.9590*	0.9540*	0.9620*	0.9520*	0.9530*	0.9760*
	วิธีที่ 5	0.9640*	0.9450*	0.9610*	0.9500*	0.9550*	0.9500*	0.9480*	0.9690*
	วิธีที่ 1	0.9330	0.9520*	0.9530*	0.9560*	0.9560*	0.9600*	0.9510*	0.9410*
	วิธีที่ 2	0.9670*	0.9580*	0.9490*	0.9420*	0.9530*	0.9610*	0.9540*	0.9410*
1,000	วิธีที่ 3	0.9670*	0.9580*	0.9490*	0.9420*	0.9530*	0.9610*	0.9540*	0.9410*
	วิธีที่ 4	0.9650*	0.9680*	0.9630*	0.9560*	0.9620*	0.9640*	0.9560*	0.9460*
	วิธีที่ 5	0.9670*	0.9580*	0.9490*	0.9430*	0.9580*	0.9580*	0.9540*	0.9440*

หมายเหตุ * หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

2. ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (expected confidence interval widths)

ที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% แต่ละวิธีให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเป็นไปในทิศทางเดียวกัน ดังตารางที่ 2 และเมื่อนำค่าที่ได้จากทั้ง 5 วิธี มาเปรียบเทียบกัน พบว่า วิธีแบบ Wilson วิธีแบบ Agresti-Coull และวิธี Bootstrap Agresti-Coull ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำกว่าวิธีแบบ Wald เมื่อค่า p เข้าใกล้ 0.50 ในทุกขนาดกลุ่มตัวอย่าง โดยวิธี Bootstrap Agresti-Coull จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด ส่วนวิธีแบบ Wilson จะให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อค่า p เข้าใกล้ 0 ในทุกขนาดกลุ่มตัวอย่าง และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่วิธีการประมาณค่าทั้ง 5 วิธีให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นใกล้เคียงกันทุกกรณีของค่า p

ตารางที่ 2 ความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น จำแนกตามขนาดตัวอย่างและค่าพารามิเตอร์ p ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

ขนาดตัวอย่าง	วิธีการประมาณค่า	ค่าพารามิเตอร์ p							
		0.01	0.05	0.09	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
5	วิธีที่ 1	-	-	-	-	-	-	-	0.7640
	วิธีที่ 2	0.4413	0.4705	-	-	0.5509	0.5943	0.6092	0.6203
	วิธีที่ 3	0.5470	0.5616	-	-	0.6023	0.6245	0.6324	0.6381
	วิธีที่ 4	0.6534	0.7009	0.7363	0.7465	0.8303	0.8996	0.9230	0.9406
	วิธีที่ 5	0.5464	0.5579	-	-	0.5904	0.6083	0.6148	0.6194
10	วิธีที่ 1	-	-	-	-	-	-	-	-
	วิธีที่ 2	-	-	0.3610	-	0.4307	-	0.5004	0.5067
	วิธีที่ 3	0.3702	0.3959	0.4159	-	0.4610	0.4891	0.5082	0.5126
	วิธีที่ 4	0.3605	0.4210	0.4663	0.4745	0.5630	0.6197	0.6566	0.6649
	วิธีที่ 5	0.3694	-	0.4098	-	0.4507	0.4766	0.4945	0.4988
20	วิธีที่ 1	-	-	-	-	-	0.3886	-	0.4275
	วิธีที่ 2	0.1740	-	0.2591	0.2610	0.3270	0.3642	0.3861	0.3932
	วิธีที่ 3	0.2272	0.2582	0.2882	0.2898	0.3408	0.3707	0.3887	0.3946
	วิธีที่ 4	0.1977	0.2558	0.3079	0.3101	0.3905	0.4344	0.4600	0.4682
	วิธีที่ 5	0.2264	0.2548	0.2831	0.2847	0.3340	0.3635	0.3814	0.3873
30	วิธีที่ 1	-	-	0.1897	-	0.2788	0.3218	-	0.3523
	วิธีที่ 2	0.1285	-	0.2070	0.2184	0.2724	-	0.3256	0.3323
	วิธีที่ 3	0.1666	0.1991	0.2265	0.2357	0.2808	0.3108	0.3269	0.3329
	วิธีที่ 4	0.1417	0.1963	0.2382	0.2516	0.3134	0.3524	0.3728	0.3803
	วิธีที่ 5	0.1657	0.1962	0.2225	0.2315	0.2760	-	0.3224	0.3283
50	วิธีที่ 1	-	-	0.1536	-	0.2186	0.2513	-	0.2747
	วิธีที่ 2	-	0.1286	0.1605	0.1669	0.2154	0.2441	-	0.2649
	วิธีที่ 3	0.1099	0.1437	0.1708	0.1763	0.2196	0.2458	-	0.2650
	วิธีที่ 4	0.0926	-	0.1794	0.1864	0.2391	0.2699	0.2860	0.2920
	วิธีที่ 5	0.1091	0.1415	0.1681	0.1736	0.2170	0.2434	-	0.2627
70	วิธีที่ 1	-	-	0.1316	-	0.1855	0.2128	0.2278	-
	วิธีที่ 2	0.0661	0.1067	0.1356	-	0.1834	0.2084	0.2221	0.2266
	วิธีที่ 3	0.0833	0.1165	0.1421	0.1465	0.1861	0.2094	0.2225	0.2267
	วิธีที่ 4	0.0707	0.1177	0.1491	0.1544	0.2000	0.2262	0.2407	0.2453
	วิธีที่ 5	0.0825	0.1147	0.1401	0.1445	0.1843	0.2079	0.2209	0.2252

หมายเหตุ ตัวที่ขีดเส้นใต้ หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

\- หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

ตารางที่ 2 (ต่อ)

ขนาดตัวอย่าง	วิธีการประมาณค่า	ค่าพารามิเตอร์ p							
		0.01	0.05	0.09	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
90	วิธีที่ 1	-	-	-	0.1224	0.1641	0.1883	0.2011	0.2055
	วิธีที่ 2	0.0549	0.0935	0.1190	0.1245	0.1627	0.1852	0.1972	0.2013
	วิธีที่ 3	0.0680	0.1006	0.1237	0.1287	0.1645	0.1858	0.1974	0.2014
	วิธีที่ 4	0.0586	-	0.1296	0.1354	0.1754	0.1988	0.2112	0.2155
	วิธีที่ 5	0.0673	0.0991	0.1222	0.1272	0.1633	0.1848	0.1963	0.2003
100	วิธีที่ 1	-	-	0.1110	-	-	0.1786	0.1913	0.1951
	วิธีที่ 2	0.0502	0.0879	0.1132	0.1176	0.1546	-	0.1879	0.1915
	วิธีที่ 3	0.0620	0.0941	0.1172	0.1213	0.1562	0.1766	0.1881	0.1915
	วิธีที่ 4	0.0536	0.0959	0.1228	0.1274	0.1660	0.1881	0.2005	0.2041
	วิธีที่ 5	0.0613	0.0928	0.1159	0.1200	0.1551	0.1756	0.1872	0.1906
200	วิธีที่ 1	-	-	0.0791	-	0.1106	0.1267	0.1353	0.1383
	วิธีที่ 2	0.0317	0.0613	0.0799	0.0834	0.1101	0.1258	0.1341	0.1370
	วิธีที่ 3	0.0368	0.0636	0.0814	0.0848	0.1107	0.1260	0.1342	0.1370
	วิธีที่ 4	0.0340	0.0655	0.0847	0.0883	0.1156	0.1316	0.1400	0.1429
	วิธีที่ 5	0.0363	0.0603	0.0808	0.0842	0.1103	0.1256	0.1338	0.1367
300	วิธีที่ 1	-	-	0.0647	0.0678	0.0901	0.1035	0.1107	0.1130
	วิธีที่ 2	0.0250	0.0500	0.0651	0.0681	0.0898	0.1030	0.1101	0.1123
	วิธีที่ 3	0.0280	0.0512	0.0659	0.0689	0.0902	0.1031	0.1101	0.1123
	วิธีที่ 4	0.0268	0.0529	0.0683	0.0714	0.0934	0.1067	0.1139	0.1161
	วิธีที่ 5	0.0276	0.0509	0.0656	0.0686	0.0899	0.1029	0.1099	0.1121
500	วิธีที่ 1	-	0.0381	0.0501	0.0524	0.0699	0.0803	0.0858	0.0876
	วิธีที่ 2	0.0187	0.0386	0.0503	0.0526	0.0698	0.0800	0.0854	0.0872
	วิธีที่ 3	0.0202	0.0392	0.0506	0.0529	0.0699	0.0801	0.0855	0.0872
	วิธีที่ 4	0.0200	0.0404	0.0522	0.0546	0.0719	0.0822	0.0877	0.0895
	วิธีที่ 5	0.0199	0.0390	0.0505	0.0528	0.0698	0.0800	0.0854	0.0872
1,000	วิธีที่ 1	-	0.0270	0.0354	0.0372	0.0496	0.0567	0.0607	0.0619
	วิธีที่ 2	0.0128	0.0271	0.0355	0.0372	0.0495	0.0567	0.0606	0.0618
	วิธีที่ 3	0.0134	0.0273	0.0356	0.0374	0.0496	0.0567	0.0606	0.0618
	วิธีที่ 4	0.0136	0.0281	0.0364	0.0382	0.0506	0.0577	0.0616	0.0629
	วิธีที่ 5	0.0132	0.0273	0.0355	0.0373	0.0495	0.0566	0.0605	0.0618

หมายเหตุ ตัวที่ขีดเส้นใต้ หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุด

\- หมายถึง วิธีการประมาณค่าที่ให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

สรุปผลและเสนอแนะ

กรณีที่ระดับความเชื่อมั่น 90%, 95% และ 99% วิธีการประมาณค่าทั้ง 5 วิธีให้ผลไปในทิศทางเดียวกัน คือ วิธีแบบ Wald จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยต่ำที่สุด เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่และ $0.05 \le p \le 0.10$ วิธีแบบ Wilson จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $0.01 \le p \le 0.20$ วิธีแบบ Agresti-Coull จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาแต่ไม่สามารถให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่ต่ำที่สุดได้ วิธีแบบเบย์โดยการปรับค่าความต่อเนื่องแบบเยทส์ จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความ

เชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $p < 0.05$ และวิธี Bootstrap Agresti-Coull จะให้ค่าความน่าจะเป็นของการครอบคลุมไม่ต่ำกว่าระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดเกือบทุกกรณีศึกษาและให้ค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นต่ำที่สุดเมื่อ $0.20 \le p \le 0.50$

เอกสารอ้างอิง

Agresti, A. and Coull, B. A. 1998. Approximate is better than “exact” for interval estimation of binomial proportions, *The American Statistician*, 52, 119-126.

Brown, L.D., Cai, T.T., & DasGupta, A. 2002. Confidence intervals for a binomial proportion and asymptotic expansions. *The Annals of Statistics*, 30, 160–201.

Brown, L. and Li, X. 2005. Confidence intervals for two sample binomial distribution. *Journal of statistical planning and inference*,130, 359-375.

Ghosh, B. K. 1979. A comparison of some approximate confidence interval for the binomial parameter, *The American Statistician*, 74, 894-900.

Piegorsch, W. W. 2004. Sample sizes for improved binomial confidence intervals. *Computational Statistics & Data Analysis*, 46, 309-316.

Reiczigel, J. 2003. Confidence intervals for the binomial parameter: Some new considerations. *Statistics in Medicine*, 22, 611-621.

Sauro, J. and Lewis, J. R. 2005. Estimating completion rates from small samples using binomial confidence intervals: Comparisons and recommendations. *Proceedings of the Human Factors and Ergonomics Society*, 49, 2100-2104.

Wald. A. 1943. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *The American of Mathematical Society*, 54, 426-482.

Wilson, E. B. 1927. Probable inference, the low of succession, and statistical inference. *Journal of the American Statistical Association*, 22, 209-212.