ระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวโค้ง

Shortest Path on Some Surface

ณัฐพล บุญนำ[1] และภัคคินี ชิตสกุล[1]

Nathaphon Boonnam[1] and Pakkinee Chitsakul[1]

บทคัดย่อ

ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวโค้งที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ ประกอบด้วยผิวทรงกลม ทรงกระบอกกลม และทรงกรวยกลม โดยการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจะประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จากการวิจัยนี้ได้พบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวทรงกลมคือ ส่วนของวงกลมใหญ่ของทรงกลม สำหรับทรงกระบอกกลม เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านทรงกระบอกกลม คือ ส่วนของเกลียวหรือฮีลิกซ์ และในกรณีของกรวยกลม ส่วนของเส้นโค้งมีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล

คำสำคัญ : ระยะทางที่สั้นที่สุด สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ ส่วนของวงกลมใหญ่ ส่วนของเกลียว เส้นเวียนก้นหอย

ABSTRACT

In this paper, the shortest path problem on some surface that we studied includes sphere, circular cylinder, and circular cone by using the application of Euler differential equation. From the research, we find the shortest curve on surface of sphere is great circle of sphere. On the behalf of circular cylinder, the shortest curve on surface is helix. In the case of circular cone, the part of curve has aspect like spiral.

Keywords : shortest path, Euler differential equation, great circle, helix, spiral

E-mail : **nut4297nb@gmail.com**

บทนำ

ในทางคณิตศาสตร์ ปัญหาทาง Geodesic คือ ปัญหาที่เกี่ยวกับระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวนั้นโดยพิจารณาจากระยะทางเป็นส่วนที่น้อยที่สุดที่ไม่มีวันเพิ่มขึ้น นอกจากนี้แล้ว Geodesic จะทำให้เกิดทิศทางบนผิวได้อีกด้วย ในกรณีที่ผิวเป็นระนาบ ระยะทางที่สั้นที่สุดคือเส้นตรง ทำให้เกิดปัญหาที่ตามมาก็คือ ในกรณีที่ผิวของเราเป็นผิวโค้ง ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้งนั้นคืออะไร ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของผิวโค้งคือทรงกลม และตัวอย่างทรงกลมที่รู้จักกันดีคือโลกซึ่งมีสัณฐานเป็นทรงกลม เมื่อเราพูดถึงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวโลกและพิจารณาเฉพาะ ในบริเวณที่จำกัด ในความรู้สึกของเรานั้น จะรู้สึกว่าระยะทางที่พูดถึงนั้นเป็นเส้นตรง แต่เมื่อ

[1] สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

พิจารณาบนโลกทั้งใบ โลกเป็นผิวโค้งไม่ใช่พื้นที่ราบ เพราะฉะนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลมจะมีกราฟลักษณะอย่างไร

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม คือส่วนของวงกลมที่เรียกว่า วงกลมใหญ่ของทรงกลม (Great Circle) ปัญหาที่ตามมาก็คือ สัณฐานของโลกมีแกนตั้งและแกนนอนไม่เท่ากัน ทำให้โลกมีลักษณะคล้ายผลส้ม การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวที่ไม่ใช่ระนาบและทรงกลมจะมีวิธีการหาอย่างไร สำหรับการศึกษาในงานวิจัยนี้ จะพิสูจน์ถึงการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวกำลังสอง โดยใช้แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variation) และเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry)

ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

กราฟของสมการอันดับที่สองสำหรับตัวแปรสามตัวแปร x, y และ z ในรูปสมการทั่วไปคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1}$$

เมื่อ A,B,C,D,E,F,G,H,I,J เป็นค่าคงที่ โดยไม่พิจารณาการหมุนและการย้ายแกนผิวกำลังสอง (1) จะอยู่ในรูปอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งตาม (2) หรือ (3) คือ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \tag{2}$$

หรือ

$$Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0 \tag{3}$$

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาเฉพาะสมการมาตรฐานสำหรับผิวกำลังสองในสามมิติซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

โดยจะศึกษาผิวของทรงกลมที่มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ ทรงกระบอกกลม และครึ่งบนของทรงกรวยกลม

ชื่อผิวกำลังสอง	ทรงกลม (Sphere)	ทรงกระบอกกลม (Circular Cylinder)	ทรงกรวยกลม (Circular Cone)
รูปแบบสมการ	$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
สมการพาราามิเตอร์	$x = \rho\cos\phi\cos\theta$ $y = \rho\cos\phi\sin\theta$ $z = \rho\sin\phi$	$x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ $z = z$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$ $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ $z = \rho\cos\phi$

เมื่อ ρ คือ รัศมีของวงกลมที่เป็นภาพฉายบนระนาบ xy

ϕ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

และ θ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy โดยที่ $-\pi \le \theta \le \pi$

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ (Euler Differential Equation)

ให้ $f(x, y, y')$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง เมื่อเทียบกับอาร์กิวเมนต์ทั้งหมด โดย $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $y(a) = A$, $y(b) = B$ ซึ่งทำให้เชิงฟังก์ชัน

$$J\left[y\left(x\right)\right]=\int_{a}^{b}f(x,y,y')dx \tag{5}$$

มีค่าสุดขีด (Extremum) หรืออาจกล่าวได้ว่า ต้องการที่จะหาเชิงฟังก์ชันซึ่งให้ค่าปลายสุดในรูปแบบ (5) บนเซตของเส้นโค้งเรียบทั้งหมดที่เชื่อมระหว่างจุดที่กำหนด $P_1=(a,A)$ และ $P_2=(b,B)$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบเขต จากกฎของลิบนิซส์ (Leibniz's Rule) จะได้ว่า

$$\delta J[y(x)]=\int_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y dx \tag{6}$$

ถ้า $y(a)=A,\ y(b)=B$ เป็นเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า $\delta y\big|_a=0,\ \delta y\big|_b=0$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\delta J[y(x)]=\int_{a}^{b}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx \tag{7}$$

ถ้า $\delta J[y(x)]=0$ แล้ว $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด และ $\delta J=0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{8}$$

ดังนั้นสำหรับเชิงฟังก์ชันในสมการที่ (5) ที่นิยามบนเซตของฟังก์ชัน $y=y(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งต่อเนื่องและเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต มีค่าสุดขีดบนฟังก์ชันที่กำหนด $y(x)$ แล้ว เชิงฟังก์ชันต้องเป็นไปตามสมการของออยเลอร์ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0 \tag{9}$$

การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดบนผิว

ให้ $x=x(u,v),\ \ y=y(u,v)$ และ $z=z(u,v)$ เป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของผิวกำลังสอง โดยที่ $u=u(t)$ และ $v=v(t)$ จะได้ระยะทางระหว่างจุดสองจุด $\left(u\left(t_0\right),v\left(t_0\right)\right)$ และ $\left(u\left(t_1\right),v\left(t_1\right)\right)$ บนผิวคือ

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt=J[u,v]$$

(10)

เมื่อ $$\mathrm{E}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

(11)

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

(12)

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

(13)

นั่นคือ เราต้องการหา u และ v ที่ให้ค่าปริพันธ์ต่ำสุด ซึ่งขณะนี้ ถือว่าเป็นวิธีการหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อกำหนดจุดสองจุดบนผิวกำลังสอง ผิวนี้จะกำหนดตัวแปรตามค่าพารามิเตอร์ x,y,z ทำให้สามารถหาเส้นโค้งได้โดยประยุกต์กับสมการออยเลอร์

$$\frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

(14)

$$\frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt}\frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

(15)

ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

ในระบบพิกัดทรงกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกลมจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ ϕ และ θ เมื่อ ϕ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก และ θ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy โดยที่ ρ คือรัศมีของทรงกลม สำหรับพิกัด (x, y, z) ของจุด P บนผิวทรงกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\phi,\theta)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \rho^2 \sin^2\phi$$

(16)

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

(17)

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = \rho^2$$

(18)

เมื่อนำ (16), (17) และ (18) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi(\theta')^2 + \rho^2(\phi')^2}\,dt \qquad (19)$$

โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จะได้

$$0 - \frac{d}{d\phi}\frac{\theta' \sin^2\phi}{\sqrt{1 + \sin^2\phi(\theta')^2}} = 0 \qquad (20)$$

หรือ
$$\frac{\theta' \sin^2\phi}{\sqrt{1 + \sin^2\phi(\theta')^2}} = c_1 \qquad (21)$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$\theta(\phi) = \cos^{-1}(c_2 \cot\phi) + c_2 \qquad (22)$$

เมื่อ $c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}}$ จากสมการที่ (22) เมื่อนำมาปรับรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

$$z = Ax + By \qquad (23)$$

เมื่อ $A = \dfrac{\cos c_2}{c}$ และ $B = \dfrac{\sin c_2}{c}$ เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกลม และผ่านจุดศูนย์กลางโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกลมดังกล่าวเป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุด หรือส่วนของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมจุดสองจุดเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม ในกรณีที่จุดทั้งสองเป็นจุดคู่เล็งยัน ส่วนของวงกลมใหญ่จะยาว $\pi\rho$ ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดคู่เล็งยันดังรูป 1.1 (ก) ส่วนของวงกลมใหญ่ที่เป็นฐานของสามเหลี่ยมฐานโค้งที่มีเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP_1}$ และ $\overrightarrow{OP_2}$ เป็นด้านดังรูป 1.1 (ข) นั้น ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดคู่เล็งยันคือ

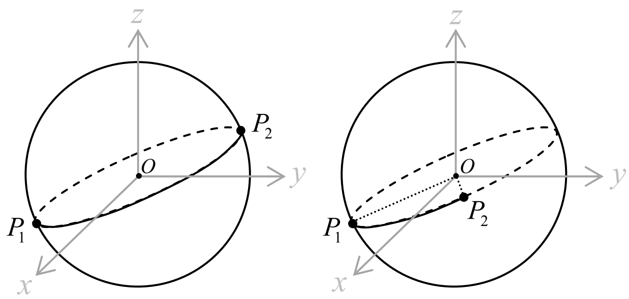
$$S = \theta\rho$$

(24)

เมื่อ $\theta = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{\rho^2}\right)$ จาก $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right|\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos\theta$ และ $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} = \rho$ จะได้

$$\rho = \sqrt{\cos\theta}$$

(25)



(a) (b)

รูปที่ 1.1 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกลมทั้ง 2 กรณี

ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอกกลม

ในระบบพิกัดทรงกระบอกกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกระบอกกลมนั้นจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ θ และ z เมื่อ θ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy และ z คือความยาวของทรงกระบอกกลม โดยที่ ρ คือรัศมีของทรงกระบอกกลมบนระนาบ xy สำหรับพิกัด (x, y, z) ของจุด P บนผิวทรงกระบอกกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\theta, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกระบอกกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 = \rho^2$$

(26)

$$F = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

(27)

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1$$

(28)

เมื่อนำ (26), (27) และ (28) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$L=\int_a^b \sqrt{\rho^2\left(\theta'\right)^2+1}\ dt \tag{29}$$

โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จะได้

$$0-\frac{d}{dz}\frac{\rho^2\left(\theta'\right)}{\sqrt{1+\rho^2\left(\theta'\right)^2}}=0 \tag{30}$$

หรือ

$$\frac{\rho^2\left(\theta'\right)}{\sqrt{1+\rho^2\left(\theta'\right)^2}}=c_1 \tag{31}$$

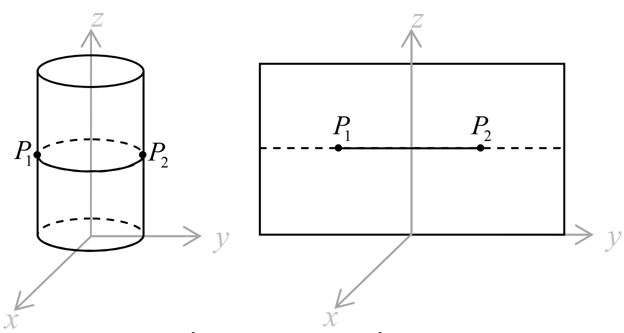
เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$\theta\left(z\right)=\left(\frac{\frac{c_1}{\rho^2}}{\rho\sqrt{\rho^2-c_1^{\,2}}}\right)z+c_2 \tag{32}$$

จากสมการที่ (32) เมื่อนำมาปรับรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

$$\theta\left(z\right)=mz+c_2 \tag{33}$$

เมื่อ $m=\left(\frac{c_1}{\rho^2}\right)\bigg/\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{\rho}\right)^2}$ เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกระบอกกลม และผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกระ-บอกกลมโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกระบอกกลมดังกล่าวดังรูป 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกระบอกกลม

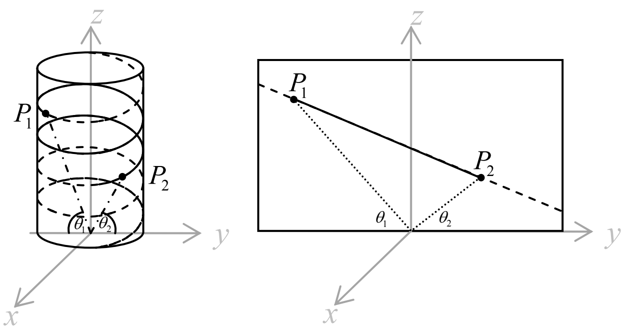
ในกรณีที่ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่ขึ้นอยู่กับ $f\left(\rho,\theta\right)=\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\theta\right)$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด จะได้

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left[-\rho\sin\theta\right]^2+\left[\rho\cos\theta\right]^2+\left[1\right]^2}\,d\theta$$

(34)

$$L=\sqrt{\rho^2+1}\left(\theta_2-\theta_1\right) \tag{35}$$

เมื่อ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมที่เกิดขึ้นระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดกับแกน y ดังรูป 1.3 นั้น โดยที่ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดสองจุดจึงเป็นส่วนของเกลียวหรือฮีลิกซ์ (Helix)



รูปที่ 1.3 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่บนส่วนของเกลียวระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกระบอกกลม

ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกรวยกลม

ในระบบพิกัดทรงกรวยกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกรวยกลม จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ θ และ ρ เมื่อ θ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy และ ρ คือ รัศมีของทรงกรวยกลม โดยที่ ϕ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก ซึ่งเป็นค่าคงที่ สำหรับพิกัด (x,y,z) ของจุด P บนผิวทรงกรวยกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\rho,\theta)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกรวยกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้ คือ การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกรวยกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\rho^2\sin^2\phi$$

(36)

$$F=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\rho}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\rho}=0$$

(37)

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2=1$$

(38)

เมื่อนำ (36), (37) และ (38) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$L=\int_a^b\sqrt{\rho^2\sin^2\phi(\theta')^2+(\rho')^2}\;dt \tag{39}$$

โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จะได้

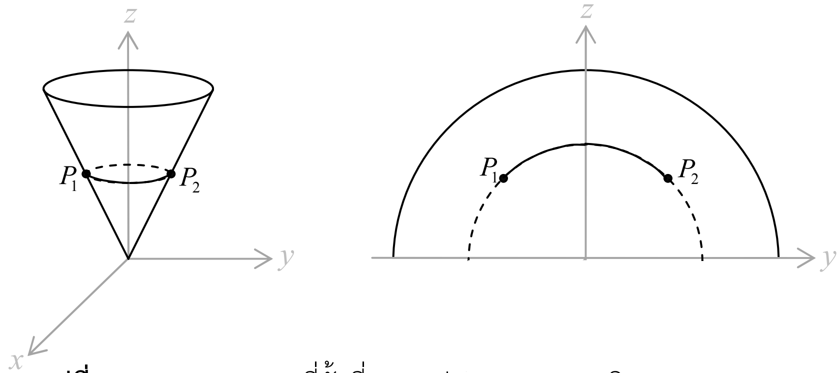
$$\sqrt{1+\left(\frac{\rho'}{\rho\sin\phi}\right)^2}-\frac{\left(\frac{\rho'}{\rho\sin\phi}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho'}{\rho\sin\phi}\right)^2}}=c_1$$

(40)

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$\rho(\theta)=Ae^{(B\sin\phi_0)\theta} \tag{41}$$

เมื่อ $A = e^{\ln c_2}$ และ $B = \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - 1}$ เป็นสมการเส้นโค้งซึ่งกำหนดค่า ϕ ของทรงกรวยกลม โดยที่ $0 < \phi < \pi$ และผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกรวยกลมโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกรวยกลมดังกล่าวดังรูป 1.4



รูปที่ 1.4 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกรวยกลม

ในกรณีที่ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่ขึ้นอยู่กับ $f(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta, \theta)$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด จะได้

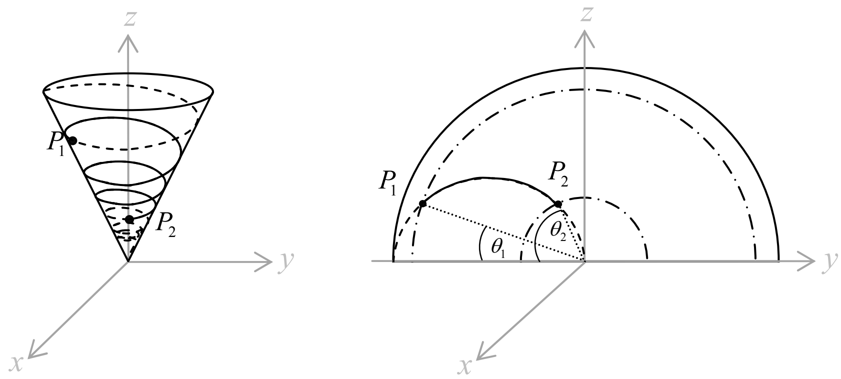
$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[\theta\cos\theta]^2 + [\theta\sin\theta]^2 + [\theta]^2}\, d\theta$$

(42)

$$L = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\theta_2^3 - \theta_1^3\right)$$

(43)

เมื่อ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมที่เกิดขึ้นระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดกับแกน y ดังรูป 1.5 นั้น โดยที่ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดสองจุดจึงเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral)



รูปที่ 1.5 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่บนส่วนของเส้นเวียนก้นหอยระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกรวยกลม

สรุปผลการวิจัย

ในการหาสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนบางผิวกำลังสองด้วยวิธีการประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์ หลังจากได้ทำการศึกษาแล้วพบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกลมนั้น คือ ส่วนของวงกลมใหญ่ สำหรับทรงกระบอกกลม เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกระบอกกลมนั้น คือส่วนของเส้นโค้งที่มี

ลักษณะเป็นเกลียวหรือฮีลิกซ์ (Helix) สำหรับทรงกรวยกลมนั้น เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกรวยกลมนั้น คือส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral) ซึ่งจากการศึกษาดังกล่าวพบว่า วิธีการประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์นั้นสามารถใช้ได้กับผิวกำลังสองที่อยู่ในรูปเชิงวงกลมเท่านั้น ดังนั้น สำหรับผู้ที่ต้องการศึกษาวิจัยต่อ ควรศึกษาในเรื่องของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ด้วยอีกทางหนึ่ง เพื่อเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดได้อีกทางหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง

I.M. Gelfand and S.V. Fomin. Calculus of Variations, Dover Publications, Inc. 1963.

John Opera. Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, Inc. 1997.

Jürgen Jost and Xianqing Li-Jost. Calculus of Variations, Cambridge University Press. 1998.

Minoru TANAKA. Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution, Department of Mathematics, Tokai University, 2000.

Minoru TANAKA. Differential Geometry, Tokai University, 2007.

ภัคคินี ชิตสกุล. เอกสารประกอบการเรียน วิชา Mathematical Modeling, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2006.